Keine Ahnung von Linearer Unabhängigkeit

Wie weist man sie nach?

Was bedeutet sie???

Datei Nr. 61103

Stand 21. Juli 2021

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort und Empfehlung

Der Begriff der linearen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit ist für viele Schüler (und vielleicht auch für Studenten) immer wieder ein Problem. Man hat schnell vergessen, wie man damit umgehen soll.

Ich schreibe daher mit diesem Text einen Lesestoff von zunächst sechs Seiten (Abschnitt 2 und 3), in denen ausführlich erklärt wird, um was es geht, versehen mit Rechenbeispielen.
Ich empfehle daher dringend, die Seiten 4 bis 9 gründlich durchzuarbeiten, denn Verständnis ist in diesem Fall sehr, sehr wichtig.

Wenn das Verständnis (wieder) vorhanden ist, sollte man auf Seite 10 die Zusammenfassung der unterschiedlichen Methoden in der Zusammenfassung ansehen damit man die Übersicht behält.
Dann kann man im abschließenden Abschnitt 5 Musterbeispiele üben.

Davon hat es eine große Vielfalt, sodass man alle möglichen Aufgabenstellungen üben kann
Zuerst geht es um 2 Vektoren des $\mathbb{R}^3$, des $\mathbb{R}^2$ und des $\mathbb{R}^4$. Dann untersucht man 3 Vektoren dieser Räume, und schließlich 4 Vektoren des $\mathbb{R}^3$ und der $\mathbb{R}^4$.

Dabei kommen auch ein paar Berechnungen vor, die dem Leser möglicherweise zu schwer sind, etwa der Umgang mit dem Gauß-Algorithmus oder die Berechnung von vierreihigen Determinanten.
Diese Beispiele wird eher der Student benötigen.
Also bitte nicht verzweifeln, sondern eben die Beispiele durchsehen, die vom Schwierigkeitsniveau her passen.

Inhalt

1	Vorausgesetzte Grundlagen	3
2	Abhängige Vektoren – so kann man sich das vorstellen	4
3	Linear unabhängige Vektoren	7
4	Methoden –Übersicht	10
5.	Zusatzinformationen	11
6	Musterbeispiele	
	$\boxed{1}$ 2 Vektoren des $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4$	12
	$\boxed{2}$ 3 Vektoren des $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4$	13
	$\boxed{3}$ 4 Vektoren des $\mathbb{R}^3$ und des $\mathbb{R}^4$	18

1 Vorausgesetzte Grundlagen

Diese kann man ausführlich im Text 61101 nachlesen!

Man muss wissen, was Vektoren sind: Es sind Elemente einer Menge, die man addieren und mit Zahlen multiplizieren (also Vielfache bilden) kann. Wenn dann bestimmte Rechenregeln gelten, nennt man diese Elemente Vektoren und ihre Gesamtmenge einen **Vektorraum**.

Die Vorstellung, dass Vektoren Pfeile sind, ist völlig falsch. Richtig ist, dass bestimmte Pfeilmengen als Vektoren bezeichnet werden können, aber nicht umgekehrt, denn es gibt z. B. in der Volkswirtschaft Vektoren, die mit Pfeilen nichts zu tun haben, sie stellen Bestellungen, Lieferungen, Preislisten usw. dar.

Man kann jedoch Vektoren als Zahlenstrukturen darstellen, etwa als Zahlenpaare $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,

Tripel $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, Quadrupel $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ usw. und bezeichnet sie mit „Pfeil-Buchstaben“.

Dann ist es auch egal, welche Bedeutung „unsere“ Vektoren haben, ob man sie geometrisch als „Pfeilklasse“ deutet, oder ob sie einen volkswirtschaftlichen Hintergrund haben.
Wir wollen bestimmte Rechenvorgänge untersuchen, die von der Anwendung unanbhängig sind.

Beispielsweise muss man wissen, was eine **Linearkombination von Vektoren** bedeutet.
Wenn man beispielsweise Kostenvektoren addiert, sie mit Zahlen multipliziert, dann entstehen solche

Linearkombinationen: $\vec{x} = 2\vec{a} + 5\vec{b} - 7\vec{c}$.

Oder so: $\vec{x} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$

Linearkombinationen sind der Hintergrund der linearen Abhängigkeit, die wir untersuchen wollen.

Fast alle folgenden Untersuchungen laufen auf die Untersuchung von **Gleichungssystemen** hinaus.

Man sollte zum Beispiel wissen:

… dass man bei 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten eine frei wählen kann,

… eventuell wie die Cramersche Regel mit Determinanten funktioniert (Text 61014)

… und nützlich ist die Berechnung von Determinanten. (Text 61012)

2 Abhängige Vektoren – so kann man sich das vorstellen.

Beispiel 1: Beginnen wir mit dieser einfachen Rechnung:

Aus den Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$ bilde ich die Summe, besser gesagt die *Linearkombination*

$$\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}=2\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\6\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\12\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-6\\-11\end{pmatrix}.$$

Man sieht nun, wie der Vektor $\vec{c}$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ abhängt: Es ist $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$ (C).

Diese Gleichung kann man umstellen zu: $2\vec{a}=\vec{c}+3\vec{b}$ bzw. $\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{b}+\vec{c}$. (A)

Oder so: $3\vec{b}=2\vec{a}-\vec{c}$ bzw. $\vec{b}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}$. (B)

(C) sagt uns, dass $\vec{c}$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ abhängt.

(A) sagt uns, dass $\vec{a}$ von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ abhängt.

(B) sagt uns, dass $\vec{b}$ von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ abhängt.

Das sind drei unterschiedliche Informationen. In jeder wird berichtet, dass einer von den anderen beiden abhängt. Drei Informationen zum im Grunde gleichen Sachverhalt über $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$!!

Es ist natürlich günstiger, eine einzige Formulierung für diese drei Aussagen zu haben.
Und diese lautet so:

(D) $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig.

Da sagt man dann nicht, wer von wem abhängt. Das kann man dann deuten wie man es braucht.
Die zu (D) passende Gleichung erhält man, in dem man alle drei Vektoren auf die rechte Seite bringt:

$$\vec{o}=2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c} \qquad \text{(D)}$$

Man nennt diese Gleichung eine **nicht-triviale Linearkombination** für den Nullvektor.
Dies merken wir uns jetzt, denn dieser Fachausdruck wird noch sehr wichtig.
„Nicht-trivial“ bedeutet, dass die Koeffizienten von $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ keine Nullen sind.

Das wäre eine **triviale** Linearkombination: $\vec{x}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}$

Beispiel 2: Wir vertiefen das Ganze und machen zwei Übungen:

Gegeben sind drei Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}9\\2\\-4\end{pmatrix}$. Sind sie linear abhängig?

a) Wir untersuchen zunächst, wie $\vec{c}$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ abhängt, suchen also Zahlen r und s für

$$\vec{c}=r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}$$

Mit Zahlen: $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Als Gleichungssystem geschrieben: $\left\{ \begin{array}{r} 9 = r + 3s \\ 2 = 2r - 2s \\ -4 = -2r + s \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

Ich löse es mit dem Additionsverfahren:

Durch (2) + (3) wird r eliminiert: $-2 = -s \quad \Rightarrow \quad s = 2$

Aus (3) folgt damit $-4 = -2r + \boxed{2} \quad \Rightarrow \quad 2r = 4 + 2 = 6 \quad \Rightarrow \quad r = \boxed{3}$

Achtung: Diese Rechnung ist wertlos, wenn man nicht überprüft, ob wir damit auch eine Lösung für die Gleichung (1) gefunden haben. Wir machen also die

Probe in (1): $9 = \boxed{3} + 3 \cdot \boxed{2}$

Das ist eine wahre Aussage. Also haben wir die Lösung: $r = 3$ und $s = 2$.

Ergebnis: $\vec{c} = \boxed{3} \cdot \vec{a} + \boxed{2} \cdot \vec{b}$ (4)

Aus (4) kann man durch umstellen folgern: $\boxed{\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b}}$.

Oder $\boxed{\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{3}{2}\vec{a}}$.

b) Es hat sich jedoch in der Mathematik durchgesetzt, dass man den Ansatz mit dem Nullvektor macht und fragt:

Mit welcher Linearkombination kann man den Nullvektor darstellen?

Ansatz: $\vec{o} = r \cdot \vec{a} - s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$

Mit Zahlen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Als Gleichungssystem: $\left\{ \begin{array}{r} r + 3s + 9t = 0 \\ 2r - 2s + 2t = 0 \\ -2r + s - 4t = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

Information:

Weil die Unbekannten r, s und t nur linear vorkommen (d. h. sie haben alle den nicht angeschriebenen Exponenten 1), ist es ein lineares Gleichungssystem. Und weil die Absolutglieder (also hier die rechte Seite) nur Nullen sind, nennt man es ein **homogenes** lineares Gleichungssystem.

Ich zeige jetzt verschiedene Lösungsverfahren. Eines davon solltest du gelernt haben.

1. Lösung: Additions- oder Eliminationsverfahren:

$$\left\{\begin{aligned} r+3s+9t&=0 \\ 2r-2s+2t&=0 \\ -2r+s-4t&=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

Elimination von r: (2) + (3) $\quad -s-2t=0 \quad (4)$

$2\cdot(1)+(3):\quad 7s+14t=0 \quad (5)$

Beobachtung: Gleichung (5) ist das (-7)-fache von (4) und stellt somit keine neue Bedingung dar. Eine Unbekannte ist also frei wählbar.

*W*ählt man z. B. $t=1$, dann folgt aus (4) $s=-2$ und aus (1): $r=-3s-9t=6-9=-3$.

Dann lautet unser Ansatz: $\boxed{\vec{o}=-3\cdot\vec{a}-2\cdot\vec{b}+\vec{c}}$

Wir haben jetzt eine nicht-triviale Linearkombination für den Nullvektor gefunden.

Das heißt, dass $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linear abhängig sind.

Und man kann vor allem diese Gleichung nach jedem der Vektoren auflösen, z.B. $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$ usw.

2. Lösung: mit dem Gauß-Algorithmus

Die Koeffizientenmatrix zu $\left\{\begin{aligned} r+3s+9t&=0 \\ 2r-2s+2t&=0 \\ -2r+s-4t&=0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$ lautet $A=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&-2&2\\-2&1&-4\end{pmatrix}$

Gauß Algorithmus (Man darf Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren):

$$\begin{pmatrix}1&3&9\\2&-2&2\\-2&1&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-2\cdot Z1\sim\\+Z2\end{matrix}\begin{pmatrix}1&3&9\\0&-8&-16\\0&-1&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}+3\cdot Z3\\+8\cdot Z3\sim\\ \end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&0&0\\0&-1&-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned} r+3t&=0\\ 0&=0\\ -s-2t&=0\end{aligned}\right\}\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

Weil die 2. Zeile eine Nullzeile, also keine Bedingung ist, kann man eine Variable frei wählen:

Wähle t = 1, dann folgt aus (3): s = -2 und aus (1) r = -3.

Dann lautet unser Ergebnis: $\boxed{\vec{o}=-3\cdot\vec{a}-2\cdot\vec{b}+\vec{c}}$

Das heißt für uns:

Man kann den Nullvektor als <u>nicht-triviale Linearkombination</u> darstellen

Das heißt, dass $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ <u>linear abhängig</u> sind.

Von ganz besonderer Bedeutung ist eine dritte Untersuchungsmethode:

Die 3. Lösung: Lösung mit Determinanten (Cramersche Regel)

wird auf Seite 7 vorgeführt.

3 Linear unabhängige Vektoren

Nachdem wir nun wissen, dass man die lineare Abhängigkeit von Vektoren dadurch nachweise kann, dass man zeigt, dass sich der Nullvektor als nicht-triviale Linearkombination darstellen lässt, müssen wir natürlich fragen, wie man dann die lineare Unabhängigkeit untersucht und was sie bedeutet.

Der beste Zugang ist ein **Beispiel 3:**

Untersuche die lineare Abhängigkeit der Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}9\\2\\4\end{pmatrix}$

Wir machen den Ansatz, dass wir den Nullvektor als Linearkombination darstellen:

$$\vec{o}=r\cdot\vec{a}-s\cdot\vec{b}+t\cdot\vec{c}$$

Mit Zahlen: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}9\\2\\4\end{pmatrix}$

Als Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix}r+3s+9t=0\\2r-2s+2t=0\\-2r+s+4t=0\end{Bmatrix}\quad\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$

Nun sollte man dieses System auf die Art lösen, die man beherrscht. Ich zeige drei Methoden:

1. Lösung: Additions- oder Eliminationsverfahren:

$$\begin{Bmatrix}r+3s+9t=0\\2r-2s+2t=0\\-2r+s+4t=0\end{Bmatrix}\quad\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

Elimination von r: (2) + (3) $\qquad -s+6t=0 \quad (4)$

$2\cdot(1)+(3):\qquad 7s+22t=0 \quad (5)$

Elimination von s: $(5)+7\cdot(4):\qquad 64t=0 \Rightarrow \boxed{t=0}$

Aus (4) folgt dann $\boxed{s=0}$ und aus (1): $\boxed{r=0}$

Dann lautet unser Ergebnis: $\boxed{\vec{o}=0\cdot\vec{a}-0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}}$ (*)

ACHTUNG: Es leuchtet sofort ein, dass die Gleichung (*) immer gilt !!!
Denn wenn man jeden Vektor 0-mal nimmt, erhält man immer den Nullvektor.
Die Gleichung (*) gilt also auch für die abhängigen Vektoren in Beispiel 2.
Dort gibt es aber noch die nicht-triviale Linearkombination: $\boxed{\vec{o}=-3\cdot\vec{a}-2\cdot\vec{b}+\vec{c}}$.

Im Beispiel 3 gibt es jedoch nur die triviale Linearkombination (*),

die man nicht nach $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ oder $\vec{c}$ umstellen kann. Diese Vektoren sind also unabhängig!

MERKE: **Kann man den Nullvektor NUR als triviale Linearkombination von Vektoren darstellen, dann sind diese linear unabhängig.**

2. Lösung: mit dem Gauß-Algorithmus

Die Koeffizientenmatrix zu $\left\{\begin{matrix} r+3s+9t=0 \\ 2r-2s+2t=0 \\ -2r+s+4t=0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$ lautet $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Gauß Algorithmus: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2\cdot Z1 \sim \\ +Z2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} +3\cdot Z3 \\ +8\cdot Z3 \sim \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 32 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} r+3t=0 \\ 32t=0 \\ -s+6t=0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$

Aus (2) folgt $\boxed{t=0}$, damit folgt aus (1): $\boxed{r=0}$ und aus (3): $\boxed{s=0}$

Dann lautet unser Ergebnis: $\boxed{\vec{o}=0\cdot\vec{a}-0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}}$ (*)

Und weil der Nullvektor NUR als triviale Linearkombination darstellbar ist, sind die Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linear unabhängig.

3. Lösung: Lösung mit Determinanten (Cramersche Regel)

$$\left\{\begin{matrix} r+3s+9t=0 \\ 2r-2s+2t=0 \\ -2r+s+4t=0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

Die Cramersche Regel besagt für den Fall, dass die Determinante $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ ungleich Null ist,

die Lösungen so berechnet werden können: $r=\frac{D_1}{D},\ s=\frac{D_2}{D},\ t=\frac{D_3}{D}.$

Ist aber D = 0, dann gibt es keine eindeutige Lösungent, also entweder unendlich viele nicht-triviale Lösungen oder gar keine. Dann muss man eines der beiden anderen Verfahren verwenden.

Ich berechne diese Determinante nach Sarrus (Text 61012): *)

$$D=\left|\begin{matrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{matrix} = -8-12+18-(36+2+24)=-64$$

Die Zählerdeterminanten sind alle 0, z.B. $D_1=\left|\begin{matrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix}=0$

(Für D_1 wird die erste Spalte durch die drei Nullen der rechten Seite ersetzt.)

Nach Cramer ist daher $r=\frac{0}{-64}=0$ und analog dazu $s=t=0$

Dann lautet unser Ergebnis: $\boxed{\vec{o}=0\cdot\vec{a}-0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}}$ (*)

Weil der Nullvektor NUR als triviale Linearkombination darstellbar ist, sind die Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linear unabhängig.

---

*) Man addiert die drei schrägen „Abwärtsprodukte“ und subtrahiert die drei Aufwärtsprodukte:

$$D=\underbrace{1\cdot(-2)\cdot4}_{-8}+\underbrace{3\cdot2\cdot(-2)}_{-12}+\underbrace{9\cdot2\cdot1}_{18}-\underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot9}_{36}-\underbrace{1\cdot2\cdot1}_{2}-\underbrace{4\cdot2\cdot3}_{24}=-64$$

Hinweis:

Das Interessante an dieser Lösung ist die Tatsache, dass man eigentlich nur die Determinante

$D = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix}$ berechnen muss.

Ist diese ungleich 0, dann folgt immer wie gezeigt, dass alle drei Ergebnisse 0 sind. Dann folgt also immer die Gleichung (*).

Hat man dagegen 3 abhängige Vektoren vorliegen, dann kann D nicht ungleich Null sein, denn sonst wäre sie ja, wie gesehen, doch unabhängig.

Die Determinante von abhängigen Vektoren muss also immer 0 sein.

4 Methoden-Übersicht

Wie findet man heraus, ob n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ linear abhängig oder unabhängig sind?

Grundidee:

Wenn man den Nullvektor nur als triviale Linearkombination durch sie darstellen kann, dann sind sie linear **unabhängig**.

Gibt es dagegen auch eine nicht-triviale Linearkombination für den Nullvektor, dann sind diese Vektoren linear **abhängig**.

Die Rechnung dazu:

Man muss die Gleichung $\vec{o} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + ... + r_n\vec{a}_n$ lösen.

Diese Gleichung ist ein Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten r_1 bis r_n

Seine Lösung findet man entweder mit dem **Additionsverfahren** (durch Elimination), oder mit dem **Gauß-Algorithmus**, oder mit dem **Determinantenverfahren**.

Haben alle Koeffizienten r_i den Wert 0, dann sind die Vektoren linear unabhängig, ist mindestens einer ungleich 0, dann sind sie linear abhängig.

Die Besonderheit der Determinantenmethode

liegt darin, dass sie nur anwendbar ist, wenn die Koeffizientenmatrix quadratisch ist, also wenn es um so viele Vektoren geht, wie diese Koordinaten haben, also bei 2 Vektoren des $\mathbb{R}^2$, bei 3 Vektoren des $\mathbb{R}^3$, bei 4 Vektoren des $\mathbb{R}^4$ usw. wobei die Berechnung von vierreihigen Determinanten sehr aufwändig ist.

Bei der Determinantenmethode, muss man die Koeffizienten nicht berechnen, denn es genügt diese Untersuchung:

Ist $D = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_1, \vec{a}_2, ...$ sind linear abhängig

Ist $D = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_1, \vec{a}_2, ...$ sind linear unabhängig

Und bei zwei Vektoren:

Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn einer ein Vielfaches des anderen ist.

Denn wenn z. B. $\vec{b} = 3\vec{a}$ ist, dann folgt daraus $\vec{o} = 3\vec{a} - \vec{b}$, und das ist eine nicht-triviale Linearkombination für den Nullvektor.

5 Zusatzinformationen

Es gibt Situationen, zu denen keine Rechnung erforderlich sind. Hier ein paar Infos dazu:

(1) Wenn man die Aufgabe hat, die lineare Unabhängigkeit der drei Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ zu untersuchen, ist man schnell fertig:

Man sollte erkennen, dass $\vec{c} = -2 \cdot \vec{b}$ ist, d.h. dass $\vec{b}$ und $\vec{c}$ abhängig sind.

Dann sind auch alle drei Vektoren, also $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ abhängig.

Merke: Sind in einer Menge von Vektoren einige linear abhängig, dann ist auch die ganze Menge linear abhängig.

(2) Befindet sich in einer Menge von Vektoren der Nullvektor, dann ist die ganze Menge linear abhängig.

6 Zehn wichtige Musterbeispiele

$\boxed{1}$ Abhängigkeit von 2 Vektoren

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{2}{3} \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$

Methode: Ist $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$?

Mit Zahlen: $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{2}{3} \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4k = -6 \\ -\frac{2}{3}k = 1 \\ 6k = -9 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} k = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \\ k = -\frac{3}{2} \\ k = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2} \end{Bmatrix}$

Da alle drei Faktoren k gleich sind, gilt: $\vec{b} = -\frac{3}{2} \cdot \vec{a}$

Also sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig.

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

Die erste Koordinate von $\vec{b}$ ist halb so groß wie die von $\vec{a}$. Das gilt aber nicht für die zweite Koordinate. Weil also $\vec{b} \neq k \cdot \vec{a}$ ist, sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig.

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ u \\ v \end{pmatrix}$ Für welche u, v sind $\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig?

Ansatz: $\vec{b} = k \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ u \\ v \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 12k = 20 \\ -9k = -15 \\ 21k = u \\ 8k = v \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} k = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \\ k = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \\ u = 21 \cdot \frac{5}{3} = 7 \cdot 5 = 35 \\ v = 8 \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{3} \end{Bmatrix}$

Ergebnis: Für u = 35 und $v = \frac{40}{3}$ sind $\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig.

$\boxed{2}$ Abhängigkeit von 3 Vektoren

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ (Sie sind linear unabhängig)

Lösung 1: Determinantenmethode:

$$\det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left|\begin{matrix}1&2&3\\3&-1&1\\0&2&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&2\\3&-1\\0&2\end{matrix}=-1+0+18-(0+2+6)=9\boxed{\neq 0}$$

Also sind die Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig.

Lösung 2: Ansatz $\vec{o}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ - Lösung mit dem Additionsverfahren:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{matrix}r+2s+3t=0\\3r-s+t=0\\2s+t=0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

Elimination von r durch $3\cdot(1)-(2)$: $\quad 7s+8t=0 \quad (4)$

Elimination von t durch $(4)-8\cdot(3)$: $\quad -9s=0 \Rightarrow \boxed{s=0}$

Aus (3) folgt damit: $\quad \boxed{t=0}$

Aus (1): $\quad \boxed{r=0}$

Ergebnis: $\vec{o}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}$, $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig.

Lösung 3: Ansatz $\vec{o}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ - Lösung mit dem Gauß-Algorithmus:

Die Koeffizientenmatrix wird auf Stufenform gebracht:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-1&1\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-3\cdot Z1\sim\\\end{matrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-7&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\+2\cdot Z3\sim\\\end{matrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&0\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&1\\0&-3&0\end{pmatrix}$$

Aus Z3: $-3s=0$ folgt s = 0.

Aus Z2: $2s+t=0$ folgt dann t = 0

Aus Z1: $r+2s+3t=0$ folgt dann r = 0.

Wer gelernt hat, was der Rang einer Matrix ist, muss r, s und t nicht berechnen. Er kann aus der Endform von A erkennen, dass der Rang von A drei ist.
Und das besagt dann, dass die drei Vektoren linear unabhängig sind.

(Näheres dazu im Text 62021 zum Rang einer Matrix und ihrer Stufenform.)

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$ (Sie sind linear abhängig)

Lösung 1: Determinantenmethode:

$$\det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\3 & -1 & 2\\0 & 2 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 2\\3 & -1\\0 & 2\end{matrix}=-2+0+18-\left(0+4+12\right)\boxed{=0}$$

Also sind die Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig.

Lösung 2: Ansatz $\vec{o}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ - Lösung mit dem Additionsverfahren:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}r+2s+3t&=0\\3r-s+2t&=0\\2s+2t&=0\end{aligned}\right\}\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

Vereinfachung von (3): $s+t=0$ (3')

Elimination von r durch $3\cdot(1)-(2)$: $7s+7t=0$ (4)

Vereinfachung von (4): $s+t=0$ (4')

$(3')-(4')$: $0=0$

Das bedeutet, dass man eine Unbekannte frei wählen kann. Damit gibt es unendlich viele Lösungen, also auch nicht-triviale.

Ergebnis: $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig.

Lösung 3: Ansatz $\vec{o}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ - Lösung mit dem Gauß-Algorithmus:

Die Koeffizientenmatrix wird auf Stufenform gebracht:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & -1 & 2\\0 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-3\cdot Z1\\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -7 & -7\\0 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\:(-1)\\:2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\-Z2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Entweder man folgert daraus, dass der Rang von A nur 2 ist, also gibt es unter den drei Vektoren nur 2 linear unabhängige, d.h. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sind linear abhängig (für Fortgeschrittene)

Oder man schreibt das zur letzten Matrix gehörende Gleichungssystem an:

$$\left\{\begin{aligned}r+2s+3t&=0\\r+s&=0\\0&=0\end{aligned}\right\}\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\quad\text{und folgert daraus:}$$

Weil (3) keine Bedingung mehr darstellt, kann man z. B. t = 1 frei wählen, erhält aus (2) t = -1 und aus (1) r = -1. Damit kann $\vec{o}$ als nicht-triviale Linearkombination durch $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ dargestellt werden: Sie sind also linear abhängig.

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ (Sie sind linear unabhängig)

Jetzt kann man die Determinantenmethode nicht mehr anwenden, weil die Koeffizientenmatrix nicht mehr quadratisch ist. Also muss man mit der Grundgleichung ansetzen:

$$\vec{o} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

Lösung 1: Additionsverfahren:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} s-t=0 & \\ r+2s \quad =0 & \\ -r+s \quad =0 & \\ 2r \quad +t=0 & \end{array}\right\} \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}$$

$(2)+(3)$: $3s=0 \Rightarrow s=0$

In (2): r = 0

in (1): t = 0

Probe in (4): 0 = 0.

Ergebnis: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear unabhängig.

Lösung 2: Gauß-Algorithmus:

Koeffizientenmatrix:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&2&0\\-1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\\\\+Z2\\-2Z2\end{array} \sim \begin{pmatrix}0&1&-1\\1&2&0\\0&3&0\\0&-4&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\\\\:3\\\\\end{array} \sim \begin{pmatrix}0&1&-1\\1&2&0\\0&1&0\\0&-4&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}-Z3\\-2\cdot Z3\\\\+4\cdot Z3\end{array} \sim \begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\cdot(-1)\\\\\\+Z1\end{array} \sim \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Interpretation:

Entweder man schreibt das korrespondierende Gleichungssystem auf:

$$\left\{\begin{array}{l}t=0\\r=0\\s=0\\0=0\end{array}\right\}$$ und hat das Ergebnis: die lineare Unabhängigkeit.

Oder Man erkennt, dass der Rang der Matrix 3 ist, was ebenfalls die lineare Unabhängigkeit der drei Vektoren ergibt.

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\17\end{pmatrix}$ (Sie sind abhängig!)

Ansatz: $\vec{o}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

Lösung 1: Additionsverfahren:

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\17\end{pmatrix}$$

Als Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix}2r-s-t=0\\r+3s+17t=0\end{Bmatrix}$

Wir müssen nichts rechnen sondern nur nachdenken:

Wenn man mehr Unbekannte als Gleichungen hat, gibt es immer unendlich viele Lösungen.

Denn weil man eine Unbekannte mehr hat als Bedingungen, kann man eine frei wählen, z. B. t = 1 und dazu die restlichen berechnen.

Und schon hat man eine nicht-triviale Linearkombination und die lineare Abhängigkeit.

Das kann man bedenkenlos verallgemeinern:

3 Vektoren des $\mathbb{R}^2$ sind stets linear abhängig,
4 Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind stets linear abhängig,
5 Vektoren des $\mathbb{R}^4$ sind stets linear abhängig,
usw.

Wer dennoch rechnen will, der wähle z. B. für t irgendeine Zahl ungleich 0, sagen wir t = 1, dann folgt durch Einsetzen:

$$\begin{Bmatrix}2r-s=1\\r+3s=17\end{Bmatrix}$$

Und daraus erhält man dann r = -2 und s = -5, also $\vec{o}=-2\vec{a}-5\vec{b}+\vec{c}$.

Man sieht also die Abhängigkeit.

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ (Sie sind linear abhängig)

Jetzt kann man die Determinantenmethode nicht mehr anwenden, weil die Koeffizientenmatrix nicht mehr quadratisch ist. Also muss man mit der Grundgleichung ansetzen:

$$\vec{o} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \qquad (*)$$

Lösung 1: Additionsverfahren:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} s + 4t = 0 \\ r + 2s + 5t = 0 \\ -r + s + 7t = 0 \\ 2r \quad - 6t = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

Reduktion auf 3 Gleichungen durch die Elimination von r:

$$\begin{array}{l} \\ (1)+(2): \\ (4)+2\cdot(3) \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{r} s + 4t = 0 \\ 3s + 12t = 0 \\ 2s + 8t = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{cc} (1) & \\ (5) & :3 \\ (6) & :2 \end{array}$$

Damit folgt aus (5) und (6) die Gleichung (1).

Und somit kann man eine Variable frei wählen, etwa t = 1 usw.
Also gibt es für (*) nicht-triviale Lösungen.

Ergebnis: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear unabhängig.

Lösung 2: Gauß-Algorithmus:

Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ +Z2 \\ -2Z2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & -4 & -16 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ :3 \\ :(-4) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -Z3 \\ -2\cdot Z3 \\ \\ -Z3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Interpretation:
Entweder scheibt man sich das Gleichungssystem auf, das zur Endmatrix gehört:

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 = 0 \\ r - 3t = 0 \\ s = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$ und erkennt, dass t frei wählbar ist, was zu nicht-trivialen Lösungen führt

und hat das Ergebnis: die lineare Abhängigkeit.

Oder man erkennt, dass der Rang der Matrix 2 ist, was auf nur zwei linear unabhängige Vektoren schließen lässt.

$\boxed{3}$ 4 Vektoren

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

Lösung ohne Rechnung:

Der Ansatz $\vec{o} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d}$ stellt ein System von 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten dar.
Das bedeutet, dass man stets eine freie Wahl hat und kann etwa r = 1 wählen.
Dann sieht man bereits, dass es eine nicht-triviale Lösung gibt.
Also sind 4 Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

Lösung mit Rechnung:

Der Ansatz $\vec{o} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d}$ führt auf $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

bzw. $\left\{\begin{matrix} r+s-u=0 \\ r+t+u=0 \\ r+s-t+u=0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$

Ich wähle u = 1, was zu $\left\{\begin{matrix} r+s =1 \\ r +t=-1 \\ r+s-t=-1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix}(1')\\(2')\\(3')\end{matrix}$

Die Lösung kann z. B. mit dem Additionsverfahren stattfinden:

Elimination von t durch $(2)+(3)$: $\left\{\begin{matrix} r+s=1 \\ 2r+s=-2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix}(1)\\(4)\end{matrix}$

Elimination von s durch $(4)-(1)$: $r=3$.

Aus (1‘) folgt dann $s=1-r=-2$

Aus (2): $t=-1-r=-1-3=-4$

und aus (1) $u=r+s=3-2=1$

Damit liefert die Ansatz-Gleichung: $\vec{o}=3\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c}+\vec{d}$

Die lineare Abhängigkeit ist somit bewiesen, und man weiß sogar, **wie** sie voneinander abhängen.

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix},\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ (Sie sind linear unabhängig)

Ansatz: $\vec{o}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$

Lösung 1: Additionsverfahren:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s+t+u=0\\ r+2s+2t=0\\ -r+s+u=0\\ 2r-t=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}$$

Elimination von u durch $(1)-(3)\rightarrow(5)$
$$\left\{\begin{array}{l} r+2s+2t=0\\ 2r-t=0\\ r+t=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}(2)\\(4)\\(5)\end{array}$$

Elimination von t durch $\begin{array}{l}(2)+2\cdot(4):\\(4)+(5):\end{array}$
$$\left\{\begin{array}{l}5r+2s=0\\3r=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}(6)\\(7)\end{array}$$

Aus (7) folg: $\boxed{r=0}$, aus (6) folgt $\boxed{s=0}$, aus (5) folgt $\boxed{t=0}$ und aus (1): $\boxed{u=0}$.

Also lässt sich der Nullvektor nur als triviale Linearkombination darstellen,

$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ sind also linear unabhängig.

Lösung 2: Gauß-Algorithmus:

Die Koeffizientenmatrix $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&2&2&0\\-1&1&0&1\\2&0&-1&0\end{pmatrix}$ wird in eine Stufenform gebracht:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&2&2&0\\-1&1&0&1\\2&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\+Z2\\+2\cdot Z3\end{array}\sim\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&2&2&0\\0&3&2&1\\0&2&-1&2\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\-2\cdot Z1\\-3\cdot Z1\\-2\cdot Z1\end{array}\sim\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&-2\\0&0&-1&-2\\0&0&-5&2\end{pmatrix}\begin{array}{l}+Z3\\\\\\-5\cdot Z3\end{array}\sim\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&-2\\0&0&-1&-2\\0&0&0&12\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\\\:12\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&-2\\0&0&-1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\rightarrow Z2\\\rightarrow Z1\\\cdot(-1)\\\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Man kann keine Zeile in eine Nullspalte verwandeln, daher ist der Rang von A gleich 4
Das bedeutet, dass alle vier Spaltenvektoren in A linear unabhängig sind.

Wer nicht mit dem Rang von A umgehen kann, schreibt die Endmatrix in ein Gleichungssystem um und berechnet von unten nach oben daraus u=0, t =0, s=0 und r=0
und kommt so auch auf die lineare Unabhängigkeit.

Lösung 3: Determinantenmethode

Dazu muss der Leser jedoch die Berechnung von Vierer-Determinanten beherrschen,

etwa durch **Entwicklung nach der ersten Zeile**, die ich ohne weitere Erklärung zeige (siehe Text 61012).

$$\det(A)=\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0-\mathbf{1}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{1} \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}_{D2}+\mathbf{1}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{D3}-\mathbf{1}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 2 \\ -1 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{D4}$$

D2 wird nach der 3. Spalte entwickelt: $D2=-\boxed{1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=5$

D3 wird nach der 3. Zeile entwickelt: $D3=2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4$

D4 wird nach der 2. Spalte entwickelt: $D4=-2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-2-5=-7$

Zusammengesetzt: $\det(A)=-D2+D3-D4=-5+4+7=6$

Weil $\det(A)\neq 0$ ist, besitzt das homogene Gleichungssystem $\vec{o}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$ **nur triviale Lösungen,** also sind die Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ linear unabhängig..